THÈSE

DE DOCTORAT DE TROISIÈME CYCLE DE MATHÉMATIQUES PURES

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
DE GRENOBLE

par

Alexis PETITJEAN

HOMOMORPHISMES DE PSEUDO-GROUPES DE LIE

Soutenue le 24 février 1972 devant la Commission d'examen

C. CHABAUTY Président
H. GOLDSCHMIDT
J.L. KOSZUL
A.M. RODRIGUES
Examinateurs

THÈSE

DE DOCTORAT DE TROISIÈME CYCLE DE MATHÉMATIQUES PURES

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
DE GRENOBLE

par

Alexis PETITJEAN

HOMOMORPHISMES DE PSEUDO-GROUPES DE LIE

BIBLIOTHÈQUE

Soutenue le 24 février 1972 devant la Commission d'examen

C. CHABAUTY Président
H. GOLDSCHMIDT
J.L. KOSZUL Examinateurs
A.M. RODRIGUES

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

SOMMAIRE

Pages

Introduction I

Chapitre I - PROLONGEMENTS D'HOMOMORPHISMES D'ALGEBRES DE LIE TRANSITIVES

1 - Préliminaires 1

2 - Algèbre des dérivations sur une algèbre de séries formelles 4

3 - Algèbres projetables. Théorèmes de prolongement 8

Chapitre II - CORRESPONDANCE ENTRE ALGEBRES DE LIE ABSTRAITES ET PSEUDO-GROUPES DE LIE TRANSITIFS

1 - Représentation d'homomorphismes par des jets 15

2 - Premier problème d'équivalence locale 19

3 - Homomorphismes de pseudo-groupes 22

4 - La relation d'équivalence de E. Cartan 24

Bibliographie 26

Notations 28

INTRODUCTION

Soient Θ_1 et Θ_2 deux pseudo-groupes de Lie infinitésimaux analytiques, définis sur les variétés M_1 et M_2 respectivement. On dit que Θ_1 et Θ_2 sont équivalents au sens de E. Cartan, s'il existe un troisième pseudo-groupe de Lie infinitésimal Θ_3 défini sur une variété M_3 et des fibrations $\rho_1 : M_3 \to M_1$ et $\rho_2 : M_3 \to M_2$ tels que Θ_3 soit un prolongement isomorphe (prolongement holoédrique de E. Cartan) de Θ_1 par rapport à ρ_1 et de Θ_2 par rapport à ρ_2 .

E. Cartan a fait de cette définition une base de sa théorie de "groupes de Lie infinis" mais il n'a pas démontré qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Dans [8] , Kuranishi démontre, pour les pseudo-groupes de transformations finies que l'on obtient une relation d'équivalence, si l'on ajoute deux conditions très fortes à la définition de E. Cartan de prolongement isomorphe. Dans le même travail, il associe à chaque pseudo-groupe de Lie analytique (transitif ou non) une algèbre de Lie "formelle" obtenue en paramétrisant, d'une façon convenable, l'ensemble des équations de définition du pseudo-groupe et démontre que la classe d'équivalence de E. Cartan d'un pseudo-groupe transitif ne dépend que de l'algèbre de Lie formelle associée. Plus tard, il a été démontré ([9] et [13] (2)), que pour les pseudo-groupes transitifs, les deux conditions introduites par Kuranishi sont des conséquences des autres conditions de la définition d'un prolongement isomorphe.

On peut aussi associer à un pseudo-groupe de Lie infinitésimal, l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels du pseudo-groupe ; dans le cas transitif, c'est une algèbre de Lie transitive, au sens de [4] . En choisissant des coordonnées appropriées, on pourrait, du reste, construire des isomorphismes de l'algèbre considérée par Kuranishi sur l'algèbre des

.../...

champs formels.

Le but de ce travail est de démontrer un théorème (cf chapitre II, théorème 4.1) qui établit une correspondance entre morphismes de pseudo-groupes de Lie transitifs et analytiques et morphismes des algèbres de Lie associées, et d'appliquer ce théorème pour démontrer que deux pseudo-groupes de Lie analytiques et transitifs sont équivalents selon E. Cartan, si et seulement si leurs algèbres de Lie sont isomorphes en tant qu'algèbres de Lie topologiques. On retrouve ainsi, dans le cadre des pseudo-groupes de Lie infinitésimaux et des algèbres de Lie transitives, l'analogue du théorème de Kuranishi mentionné plus haut.

Dans le premier chapitre, on démontre certains théorèmes de prolongement d'homomorphismes d'algèbres de Lie filtrées. Les résultats obtenus constituent, dans une certaine mesure, une généralisation des résultats de Guillemin-Sternberg [4] et de Rim [12] (voir aussi Hayashi [6]). On y trouve également un théorème de A.M. Rodrigues, caractérisant tous les automorphismes de l'algèbre de Lie filtrée des dérivations de l'algèbre des séries formelles à coefficients dans un espace vectoriel.

Au deuxième chapitre, on démontre d'abord que tout isomorphisme des algèbres de Lie filtrées associées à deux pseudo-groupes de Lie analytiques, transitifs, peut être représenté, jusqu'à un ordre fixé d'avance, par un isomorphisme local des pseudo-groupes (théorème II,2.2). En particulier (corollaire II,2.3) on retrouve un critère d'isomorphisme local de pseudo-groupes, qui avait été démontré par des méthodes différentes, dans [3] et [5] . Ensuite, on démontre, en utilisant le quotient d'un pseudo-groupe transitif par une fibration invariante (cf [9] et [13] (1) et (2)), le théorème sur la correspondance entre morphismes de pseudo-groupes et morphismes d'algèbres de Lie filtrées. On utilise ce résultat pour donner une caractérisation algébrique des classes d'équivalence des pseudo-groupes transitifs au sens de E. Cartan.

Le deuxième chapitre de cette thèse est une rédaction d'un travail fait en collaboration avec Monsieur A.M. Rodrigues.

A ma mère

C'est à mon oncle Michel TZANAKAKIS que je dois d'avoir aimé les Mathématiques et à ma mère et mon frère Christian d'avoir pu faire des études. A ces trois personnes bien aimées, j'exprime ici toute ma reconnaissance.

Aucune parole ne saurait exprimer mes sentiments envers Monsieur Alexandre M. RODRIGUES. Il a su devenir mon ami, tout en restant mon professeur et conseiller. C'est à lui que je dois l'idée de ce travail et c'est lui qui, par son aide constante, m'a permis d'en venir à bout.

Je tiens également à remercier Monsieur C. CHABAUTY qui a bien voulu accepter de présider le jury de thèse.

Monsieur J.L. KOSZUL a accepté d'être examinateur. Je l'en remercie vivement, d'autant plus que ses cours que j'ai suivis pendant trois ans, m'ont été par la suite d'une très grande utilité.

Je remercie aussi Monsieur H. GOLDSCHMIDT qui a accepté de participé au jury.

Madame GUTTIN-LOMBARD a dactylographié ce travail, je l'en remercie vivement.

CHAPITRE I

PROLONGEMENTS D'HOMOMORPHISMES D'ALGEBRES DE LIE TRANSITIVES

Dans tout ce chapitre, on désignera par K un corps commutatif de caractéristique nulle qui sera le corps de base de tous les espaces vectoriels considérés.

1 - PRELIMINAIRES.

Pour les notions utilisées ici, on pourra se reporter à [4] , [6] , [11] , [12] et [16] . Toutes les algèbres de Lie filtrées considérées seront supposées géométriques et séparées pour la topologie associée à leur filtration.

Si L est une algèbre de Lie filtrée, on notera $grL = \oplus\, gr^k L$ l'algèbre de Lie graduée associée, $\omega(L)$ son premier tenseur de structure et $TrL = (gr^{-1}L, gr^o L, \omega(L))$ son algèbre tronquée. On posera souvent

$$gr^{-1}L = V \ , \quad gr^k L = g^k \ , \text{ pour } \ k \geq 0$$

et l'on notera $\rho^{-1} : L \to V$ et $\rho^k : L^k \to g^k$, pour $k \geq 0$, les projections canoniques (ou V_L , g^k_L , ρ^{-1}_L et ρ^k_L respectivement, s'il y a risque de confusion).

Si $h : L_1 \to L_2$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie filtrées, on notera $grh = (gr^{-1}h, gr^o h, \ldots) : grL_1 \to grL_2$ l'homomorphisme gradué correspondant et $h^k : L_1/L_1^k \to L_2/L_2^k$ l'homomorphisme tronqué d'ordre k

induit par h .

Le reste de ce paragraphe sera consacré à l'étude des homomorphismes d'algèbres de Lie filtrées. Rappelons d'abord le résultat suivant (cf [11] chap.I) :

1.1. Si L est une algèbre de Lie filtrée transitive, l'unique idéal de L contenu dans L^o est l'idéal nul.

1.2. Proposition.

On considère deux algèbres de Lie filtrées L_1 et L_2 et un homomorphisme d'algèbres de Lie $h : L_1 \to L_2$ tel que $h(L_1^o) \subset L_2^o$. On pose $gr^{-1}L_1 = V_1$, $gr^{-1}L_2 = V_2$ et l'on note φ l'homomorphisme de V_1 dans V_2 induit par h .

1) On suppose L_2 transitive et h surjectif. Alors h est un homomorphisme d'algèbres de Lie filtrées.

2) Si L_1 est transitive et φ bijectif alors h est injectif.

3) On suppose L_1 et L_2 transitives, h surjectif et φ bijectif. Alors h est un isomorphisme d'algèbres de Lie filtrées.

4) Si L_2 est transitive et s'il existe un homomorphisme bijectif d'algèbres de Lie filtrées $f : L_1 \to L_2$, tel que $\ker \varphi \subset \ker gr^{-1}f$, alors h est injectif.

Démonstration :

1) On montre que $h(L_1^k) \subset L_2^k$ pour tout $k \geq 0$, par récurrence sur k . On a par hypothèse $h(L_1^o) \subset L_2^o$. Supposons que $h(L_1^k) \subset L_2^k$ $(k \geq 0)$. Soit $x \in L_1^{k+1}$; on a, en particulier, $x \in L_1^k$, donc $h(x) \in L_2^k$. Soit $y \in L_2$; puisque h est surjectif, il existe $z \in L_1$ tel que $h(z) = y$. On a $[x,z] \in L_1^k$, donc $[h(x),y] \in L_2^k$. Comme L_2 est transitive, ceci implique, $h(x) \in L_2^{k+1}$.

2) Soit $x \in \ker h$; posons $\bar{x} = \rho^{-1}(x)$. On a $\varphi(\bar{x}) = 0$ donc $\bar{x} = 0$ i.e. $x \in L_1^o$. On a donc le résultat par 1.1.

3) D'après 2), h est bijective. Soit $y \in L_2^o$ et posons $x = h^{-1}(y)$. Si $\bar{x} = \rho^{-1}(x)$, on a $\varphi(\bar{x}) = 0$ donc $\bar{x} = 0$ i.e. $x \in L_1^o$. Par suite, on a $h(L_1^o) = L_2^o$ ce qui, d'après 1), entraîne $h(L_1^k) = L_2^k$ pour tout k .

4) Soit $x \in \ker h$; posons $\bar{x} = \rho^{-1}(x)$. On a $\varphi(\bar{x}) = 0$ donc $gr^{-1} f(\bar{x}) = 0$ i.e. $f(x) \in L_2^o$. Il en résulte que $f(\ker h) \subset L_2^o$. Comme f est surjectif, $f(\ker h)$ est un idéal de L_2 . De 1.1 résulte alors que $f(\ker h) = 0$ donc $\ker h = 0$ puisque f est injectif.

Rappelons que si L est une algèbre de Lie filtrée, son p^e prolongement normal est l'algèbre de Lie filtrée $L_{[p]}$ ayant la même structure d'algèbre de Lie que L et dont la filtration est donnée par

$$(L_{[p]})^k = \begin{cases} L & \text{si } k = -1 \\ L_{p+k} & \text{si } k \geq 0 \end{cases} .$$

Si L est transitive, $L_{[p]}$ l'est aussi.

1.3. Corollaire.

Soient L_1 et L_2 deux algèbres de Lie filtrées et $h : L_1 \to L_2$ un homomorphisme surjectif et continu d'algèbres de Lie. Si L_2 est transitive, il existe un entier $d \geq 0$ tel que $h(L_1^{k+d}) \subset L_2^k$ pour tout $k \geq 0$.

Démonstration :

Comme h est continu, il existe $d \geq 0$ tel que $h(L_1^d) \subset L_2^o$. Il suffit donc d'appliquer 1.2, 1) à $h : L_{1[d]} \to L_2$.

1.4. Corollaire.

Soient L_1 , L_2 et L_3 des algèbres de Lie filtrées. Soient $\mu : L_1 \to L_2$ et $\nu : L_1 \to L_3$ deux homomorphismes surjectifs d'algèbres de Lie filtrées. On suppose que $\ker gr^{-1}\mu \subset \ker gr^{-1}\nu$ et que L_3 est transitive. Il existe alors un homomorphisme surjectif d'algèbre de Lie filtrées $h : L_2 \to L_3$ et un seul, tel que $h \circ \mu = \nu$.

Démonstration :

La condition $\ker gr^{-1}\mu \subset \ker gr^{-1}\nu$, implique que $\mu^{-1}(L_2^o) \subset \nu^{-1}(L_3^o)$. En particulier $\nu(\ker \mu) \subset L_3^o$. Comme ν est surjectif et que L_3 est transitive, on a, compte tenu de 1.1 , $\ker \mu \subset \ker \nu$. Il existe donc un homomorphisme surjectif d'algèbres de Lie $h : L_2 \to L_3$ et un seul, tel que $h \circ \mu = \nu$. Comme $\mu^{-1}(L_2^o) \subset \nu^{-1}(L_3^o)$, on a $h(L_2^o) \subset L_3^o$. Par suite, h est, d'après 1.2.1), un homomorphisme d'algèbres de Lie filtrées.

1.5. Proposition.

Soit L une algèbre de Lie filtrée transitive et complète. Si $h : L \to L$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie filtrées tel que $gr^{-1}h$ soit bijectif, alors h est un automorphisme de L .

Démonstration :

La proposition 1.2, 4) implique que h est injectif ; par suite, pour tout $k \geq 0$, l'homomorphisme tronqué $h^k : L/L^k \to L/L^k$ est injectif, donc bijectif. Le fait que L est complète, implique alors, que h est surjectif. On a, donc, le résultat, compte tenu de 1.2.3) .

2 - ALGEBRE DES DERIVATIONS SUR UNE ALGEBRE DE SERIES FORMELLES.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie. On note $\hat{S}(V^*)$ l'algèbre locale des séries formelles à coefficients dans V^* . Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\hat{S}(V^*)$ et $\mathfrak{m}^k$ sa k^e puissance. Alors $\{\mathfrak{m}^k\}$ est une filtration décroissante sur $\hat{S}(V^*)$ et $\hat{S}(V^*)$, muni de la topologie associée à cette filtration est une algèbre topologique séparée et complète.

Soit $D(V)$ l'algèbre de Lie des dérivations de $\hat{S}(V^*)$. Pour $k \geq -1$, soit $D^k(V)$ l'ensemble des $X \in D(V)$ tels que $X\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}^{k+1}$. Alors $\{D^k(V)\}$ est une filtration sur $D(V)$ et $D(V)$ munie de cette filtration est une algèbre de Lie filtrée acyclique (en particulier donc transi-

tive) et complète.

On a un isomorphisme d'espaces vectoriels de $V \otimes \hat{S}(V^*)$ sur $D(V)$ défini par

$$\Phi : x \otimes f \in V \otimes \hat{S}(V^*) \rightarrow f \frac{\partial}{\partial x} \in D(V)$$

où $\frac{\partial}{\partial x}$ est la dérivation suivant le vecteur x.

Aù moyen de Φ, on transporte à $V \otimes \hat{S}(V^*)$ la structure d'algèbre de Lie filtrée de $D(V)$. Le crochet sur $V \otimes \hat{S}(V^*)$ est alors donné par :

$$[x \otimes f, y \otimes g] = y \otimes (f \frac{\partial g}{\partial x}) - x \otimes (g \frac{\partial f}{\partial y})$$

et la filtration :

$$(V \otimes \hat{S}(V^*))^k = V \otimes \mathfrak{m}^{k+1} .$$

Dans la suite $V \otimes \hat{S}(V^*)$ sera toujours supposé muni de cette structure. On identifiera souvent les algèbres de Lie filtrées $D(V)$ et $V \otimes \hat{S}(V^*)$ au moyen de Φ. Remarquons que $gr^k D(V)$ est ainsi identifié à $V \otimes S^{k+1}(V^*)$; plus précisément si $X \in gr^k D(V)$ il sera identifié à l'élément

$$x_1 \ldots x_{k+1} \in S^{k+1}(V) \rightarrow [x_{k+1}, [\ldots, [x_1, X] \ldots]] \in V$$

de $V \otimes S^{k+1}(V^*)$.

On note $\mathrm{Aut}\, \hat{S}(V^*)$ (resp $\mathrm{Aut}\, D(V)$) le groupe des automorphismes de l'algèbre filtrée $\hat{S}(V^*)$ (resp de l'algèbre de Lie filtrée $D(V)$). On remarque que si $F \in \mathrm{Aut}\, \hat{S}(V^*)$ alors l'application

$$\tilde{F} : X \in D(V) \rightarrow F \circ X \circ F^{-1} \in D(V)$$

appartient à $\mathrm{Aut}\, D(V)$. On se propose de montrer que tous les éléments de $\mathrm{Aut}\, D(V)$ sont de cette forme.

Les résultats qui suivent m'ont été communiqués par M. A.M. RODRIGUES.

Si $H \in \mathrm{Aut}\, \hat{S}(V^*)$, on écrira $H \equiv \mathrm{id}_{\hat{S}(V^*)} \bmod \mathfrak{m}^k$ si $H(f) - f \in \mathfrak{m}^k$ pour tout $f \in \hat{S}(V^*)$. On notera $\mathcal{G}^k$ le sous-groupe des $H \in \hat{S}(V^*)$ tels que $H \equiv \mathrm{id}_{\hat{S}(V^*)} \bmod \mathfrak{m}^k$. De même, si $h \in \mathrm{Aut}\, D(V)$, on

écrira $h \equiv id_{D(V)} \mod D^k(V)$, si $h(X) - X \in D^k(V)$, pour tout $X \in D(V)$. Pour $X \in D(V)$, X^k $(k \geq -1)$ désigne sa composante homogène de degré k i.e. $X^k \in V \otimes S^{k+1}(V^*)$ et $X = X^{-1} + X^o + \ldots$. Si $h \in$ Aut $D(V)$ et $X \in D(V)$, on notera $h^k(X)$ la composante homogène de degré k de $h(X) - X$. Dire que $h \equiv id_{D(V)} \mod D^k(V)$ équivaut à dire que $h^{-1} = 0$, ..., $h^{k-1} = 0$.

2.1. Lemme.

Soit $h \in$ Aut $D(V)$ tel que $h \equiv id_{D(V)} \mod D^k(V)$ $(k \geq 0)$. Alors la restriction de h^k à V est un cocycle et pour tout $X \in D(V)$, $h^k(X) = h^k(X^{-1})$.

Démonstration :

Soient $X \in D(V)$ et $y \in V$. On a

$$(h[X,y])^{k-1} = [X,y]^{k-1} = [X^k,y] \ .$$

D'autre part :

$$(h[X,y])^{k-1} = [h(X),h(Y)]^{k-1} = [X^k,y] + [X^{-1},h^k(y)] + [h^k(X),y] \ .$$

On en déduit :

$$(1) \qquad [X^{-1},h^k(y)] - [y,h^k(X)] = 0 \ .$$

En supposant que $X = X^{-1} \in V$, on a, en particulier

$$(2) \qquad [X^{-1},h^k(y)] - [y,h^k(X^{-1})] = 0$$

ce qui exprime que la restriction de h^k à V est un cocycle. En comparant (1) et (2) on a

$$[y,h^k(X)] = [y,h^k(X^{-1})]$$

d'où, par transitivité, $h^k(X) = h^k(X^{-1})$.

2.2. Lemme.

Sous les hypothèses de 2.1, il existe $H \in \mathcal{G}^{k+2}$ tel que $h \circ \tilde{H} \equiv id_{D(V)} \mod D^{k+1}(V)$.

Démonstration :

Notons aussi h^k la restriction de h^k à V . Comme $h^k \in V \otimes S^{k+1}(V^*) \otimes V^*$ est un cocycle et que $D(V)$ est acyclique, il existe $\varphi \in V \otimes S^{k+2}(V^*)$ tel que $h^k = d\varphi$. Si l'on considère φ comme application de V^* dans $S^{k+2}(V^*)$ et $[x,\varphi]$, pour $x \in V$, comme application de V^* dans $S^{k+1}(V^*)$, on a $h^k(x) = [x,\varphi] = \frac{\partial}{\partial x} \circ \varphi$.

Soit H l'extension à $\hat{S}(V^*)$ de l'application :

$$\alpha \in V^* \mapsto \alpha + \varphi(\alpha) \in \hat{S}(V^*) .$$

Un raisonnement simple montre que $H \in \mathcal{G}^{k+2}$. Posons $\gamma = h \circ \tilde{H}$. Il résulte de la construction de H et de l'hypothèse sur h , que $\gamma \equiv id_{D(V)} \bmod D^k(V)$. On montre, par un calcul, que $(\tilde{H}(x))^{-1} = x$ et que $(\tilde{H}(x))^k = -\frac{\partial}{\partial x} \circ \varphi = -h^k(x)$ pour tout $x \in V$. D'autre part $\gamma^k(x) = h^k(\tilde{H}(x)) + (\tilde{H}(x))^k$; or, d'après 2.1, $h^k(\tilde{H}(x)) = h^k((\tilde{H}(x))^{-1})$, donc $\gamma^k(x) = 0$ pour $x \in V$. En appliquant de nouveau 2.1 on déduit que $\gamma^k = 0$ i.e. $\gamma \equiv id_{D(V)} \bmod D^{k+1}(V)$.

2.3. Théorème.

Pour tout $h \in \mathrm{Aut}\, D(V)$, il existe $H \in \mathrm{Aut}\, \hat{S}(V^*)$, tel que $h = \tilde{H}$.

Démonstration :

Posons $\varphi = gr^{-1}h$ et dénotons φ^* la transposée de φ . Soit H^1 l'extension de φ^* à $\hat{S}(V^*)$. Il résulte immédiatement des définitions, que $(\tilde{H}^1(X))^{-1} = \varphi^{-1}(X^{-1})$, pour tout $X \in D(V)$, donc, $h \circ \tilde{H}^1 \equiv id_{D(V)} \bmod D^0(V)$. Le lemme 2.2 affirme l'existence d'une suite $H^2, \ldots, H^k, \ldots$ d'éléments de $\mathrm{Aut}\, \hat{S}(V^*)$, telle que $H^k \in \mathcal{G}^k$ pour tout k et que $h \circ \tilde{H}^1 \circ \tilde{H}^2 \circ \ldots \circ \tilde{H}^k \equiv id_{D(V)} \bmod D^k(V)$. Comme $H^k \in \mathcal{G}^k$ pour tout k , la suite $H^1 \circ H^2 \circ \ldots \circ H^k$ d'éléments de $\mathrm{Aut}\, \hat{S}(V^*)$ a une limite dans $\mathrm{Aut}\, \hat{S}(V^*)$. Soit H l'inverse de cette limite. On vérifie aisément que H répond à la question.

3. ALGEBRES PROJETABLES. THEOREMES DE PROLONGEMENT.

On considère deux espaces vectoriels V_1 et V_2 de dimensions finies. On suppose que $\dim V_1 \geq \dim V_2$ et l'on pose $\dim V_2 = n$ et $\dim V_1 = n+m$. Soit K un sous-espace vectoriel de dimension m de V_1 . On note $K \otimes_s S^k(V_1)$ le sous-espace de $S^{k+1}(V_1)$ engendré par les tenseurs symétriques de la forme $x_1 \ldots x_{k+1}$, avec $x_1 \in K$.

Pour $k \geq 0$, soit G^k (ou $G^k(K)$ s'il y a risque de confusion) le sous-espace de $V_1 \otimes S^{k+1}(V_1^*)$ des éléments f tels que $f(K \otimes_s S^k(V_1)) \subset K$.

3.1. Lemme.

Pour tout $k \geq 0$, on a $G^{k+1} = pG^k$ où $pG^k = G^k \otimes V_1^* \cap V_1 \otimes S^{k+2}(V_1^*)$ est le premier prolongement de G^k .

Démonstration :

Si $T \in V_1 \otimes S^{k+2}(V_1^*)$ et $x \in V_1$, on note T_x l'élément de $V_1 \otimes S^{k+1}(V_1^*)$ défini par

$$T_x(x_1 \ldots x_{k+1}) = T(x_1 \ldots x_{k+1} x) .$$

Il est alors immédiat que $T \in G^{k+1}$ si et seulement si $T_x \in G^k$ pour tout $x \in V_1$ i.e. si et seulement si $T \in pG^k$.

Il en résulte en particulier que le sous-espace gradué $V_1 \oplus (\oplus_k G^k)$ de $\mathrm{gr}\, D(V_1)$ est en fait une sous-algèbre de Lie graduée. On la notera G (ou $G(K)$ s'il y a risque de confusion).

On considère maintenant, une application surjective φ de V_1 sur V_2 dont le noyau est K . Soit $S^{k+1}(\varphi) : S^{k+1}(V_1) \to S^{k+1}(V_2)$ l'extension de φ à $S^{k+1}(V_1)$. Alors $\ker S^{k+1}(\varphi) = K \otimes_s S^k(V_1)$. Il s'ensuit que, si $f \in V_1 \otimes S^{k+1}(V_1^*)$, alors $f \in G^k$ si et seulement si, il existe $\tilde{f} \in V_1 \otimes S^{k+1}(V_2^*)$ tel que $\tilde{f} \circ S^{k+1}(\varphi) = \varphi \circ f$. Cette application $\tilde{f}$ est nécessairement unique ; on la note $\varphi^k(f)$. Il est clair que nous avons ainsi défini un homomorphisme surjectif d'espaces vectoriels φ^k de G^k sur $V_2 \otimes S^{k+1}(V_2^*)$.

Calculons la dimension de G^k , pour $k \geq 0$. Comme φ^k est surjective, on a $\dim G^k = \dim V_2 \otimes S^{k+1}(V_2^*) + \dim \ker \varphi^k$. Or $\ker \varphi^k$ est isomorphe à $K \otimes S^{k+1}(V_1^*)$ donc :

3.2 $$\dim G^k = n \dim S^{k+1}(V_2^*) + m \dim S^{k+1}(V_1^*) .$$

Considérons une base $e_1,\ldots,e_{n+m}$ de V_1 , telle que $e_{n+1},\ldots,e_{n+m}$ soit une base de K ; on notera $e^1,\ldots,e^{n+m}$ sa base duale. Il est immédiat que les éléments $e_i \otimes e^{j_1}\ldots e^{j_{k+1}}$, $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_{k+1} \leq n$ ou $n < i \leq n+m$ et $1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_{k+1} \leq n+m$, de $V_1 \otimes S^{k+1}(V_1^*)$ sont indépendants, leur nombre est égal à la dimension de G^k et appartiennent à G^k , donc ils en forment une base.

Posons $\varepsilon_i = \varphi(e_i)$, $i = 1,\ldots,n$. Alors $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ est une base de V_2 dont la base duale sera notée $\varepsilon^1,\ldots,\varepsilon^n$. On remarque que

$\varphi^k(e_i \otimes e^{j_1}\ldots e^{j_{k+1}}) = \varepsilon_i \otimes \varepsilon^{j_1}\ldots\varepsilon^{j_{k+1}}$ si $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_{k+1} \leq n$,

$\varphi^k(e_i \otimes e^{j_1}\ldots e^{j_{k+1}}) = 0$ si $n < i \leq n+m$ et $1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_{k+1} \leq n+m$.

On en déduit aisément que l'homomorphisme gradué $(\varphi, \varphi^o, \ldots, \varphi^k, \ldots)$ de G sur $\operatorname{gr} D(V_2)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie graduées.

3.3. Lemme.

La base $e_1,\ldots,e_{n+m}$ de V_1 est quasi-régulière par rapport à G^o . En particulier G^o est un sous-espace involutif de $V_1 \otimes V_1^*$ (cf [7] pp. 29-30).

Démonstration :

Pour $s = 0,\ldots,n+m-1$, soit $(V_1^*)_s$ le sous-espace de V_1^* engendré par $e^{s+1},\ldots,e^{n+m}$. Posons $G_s^o = G^o \cap V_1 \otimes (V_1^*)_s$ et $\tau_s = \dim G_s^o$ Pour $s = 0,\ldots,n-1$ (resp $s = n,\ldots,n+m-1$) les vecteurs $e_i \otimes e^j$ avec $1 \leq i \leq n$ et $s < j \leq n$ ou $n < i \leq n+m$ et $s < j \leq n+m$ (resp $n < i \leq n+m$ et $s < j \leq n+m$) constituent une base de G_s^o . Le nombre de ces vecteurs est $n(n-s) + m(n+m-s)$ (resp $m(n+m-s)$) donc $\tau_s = n(n-s) + m(n+m-s)$ (resp $\tau_s = m(n+m-s)$) . En effectuant les calculs, on trouve $\sum \tau_s = \dim G^1$ (cf 3.2)

On a donc le résultat en tenant compte de 3.1 et de la proposition 6.1 de [7] .

Identifions G à une sous-algèbre de Lie filtrée de $D(V_1)$ et dénotons $\hat{G}$ son complété. Alors $\hat{G}$ est plate, donc, en particulier son tenseur de structure est nul. En plus les lemmes 3.1 et 3.3 et un théorème bien connu de Serre (cf [4] ou [16]) impliquent que $\hat{G}$ est acyclique. Pour tout homomorphisme surjectif $\varphi : V_1 \to V_2$ de noyau K , on note $\hat{\varphi}$ le prolongement par continuité de $(\varphi, \varphi^o, \ldots, \varphi^k, \ldots) : G \to \operatorname{gr} D(V_2)$ à $\hat{G}$. Alors $\hat{\varphi}$ est un homomorphisme surjectif d'algèbres de Lie filtrées de $\hat{G}$ sur $D(V_2)$.

Considérons maintenant une sous-algèbre de Lie transitive L_1 de $D(V_1)$ et l'on suppose qu'il existe un homomorphisme d'algèbres de Lie filtrées h de L_1 dans $D(V_2)$ tel que $L_2 = h(L_1)$ soit une sous-algèbre transitive de $D(V_2)$. Cette dernière condition s'exprime en disant que $\varphi = \operatorname{gr}^{-1} h : V_1 \to V_2$ est surjectif. Soit K le noyau de φ . On posera de nouveau $G^k = G^k(K)$ et $G = V_1 \oplus (\oplus_k G^k)$.

3.4. Lemme.

Pour tout $k \geq 0$, $\operatorname{gr}^k L_1 \subset G^k$ *et* $\operatorname{gr}^k h$ *est la restriction de* φ^k *à* $\operatorname{gr}^k L_1$.

Démonstration :

Soit $f \in \operatorname{gr}^k L_1$ et $x_1, \ldots, x_{k+1} \in V_1$. En appliquant les définitions, on a :

$$\operatorname{gr}^k h(f)(S^{k+1}(\varphi)(x_1 \ldots x_{k+1})) = [[\ldots[\varphi(x_{k+1}), \varphi(x_k)], \ldots, \varphi(x_1)], \operatorname{gr}^k h(f)]$$

$$= \varphi[[\ldots[x_{k+1}, x_k], \ldots, x_1], f]$$

$$= \varphi \circ f(x_1 \ldots x_{k+1})$$

ce qui achève la démonstration.

Notons i l'application identique de V_1 et $\bar{i}$ l'inclusion de $\operatorname{gr}^o L$ dans G^o .

3.5. Lemme.

Le couple $(i,\bar{i})$ est un homomorphisme injectif et acyclique d'algèbres de Lie tronquées de $\mathrm{Tr}\, L_1$ dans $\mathrm{Tr}\, \hat{G} = (V_1, G^o, 0)$. (cf [12])

Démonstration :

L'unique chose non triviale est $i_*\omega(L_1) = 0$ i.e. si τ est la torsion d'une connexion α de L_1 , alors τ appartient à l'image de d dans le complexe :

$$0 \to G^1 \to G^o \otimes V_1^* \xrightarrow{d} V_1 \otimes \Lambda^2 V_1^* \to 0$$

(deuxième complexe de Spencer de G) . On note ρ^{-1} aussi bien la projection de L_1 sur V_1 que celle de L_2 sur V_2 . Si $x \in K$, on a :

$$\rho^{-1}(h(\alpha x)) = \varphi(\rho^{-1}(\alpha x)) = \varphi(x) = 0 .$$

donc $h(\alpha x) \in L_2^o$. Pour $x,y \in K$, on a

$$\varphi(\tau(x,y)) = \varphi(\rho^{-1}[\alpha x, \alpha y]) = \rho^{-1}[h(\alpha x), h(\alpha y)] = 0$$

i.e. $\tau(\Lambda^2 K) \subset K$. Le lemme résulte alors de :

3.6. Lemme.

L'image de d est égale à l'espace vectoriel $\mathfrak{S}$ des éléments $S \in V_1 \otimes \Lambda^2 V_1^*$ tels que $S(\Lambda^2 K) \subset K$.

L'inclusion $\mathrm{Im}\, d \subset \mathfrak{S}$ est immédiate. Remarquons que $\dim \mathrm{Im}\, d = \dim G^o \otimes V_1^* - \dim \ker d$; or $\ker d = pG^o$. Compte tenu de 3.1 et 3.2 , un calcul montre que $\dim \mathrm{Im}\, d = \dim \mathfrak{S}$, donc $\mathrm{Im}\, d = \mathfrak{S}$.

3.7. Proposition.

Il existe $\lambda \in \mathrm{Aut}\, D(V_1)$, tel que $\mathrm{gr}\, \lambda = \mathrm{id}$ et que $\lambda(L_1) \subset \hat{G}$. Pour chaque tel λ il existe $\mu \in \mathrm{Aut}\, D(V_2)$ et un seul tel que $\hat{\varphi} \circ \lambda \circ j = \mu \circ h$ où $j : L_1 \to D(V_1)$ est l'inclusion.

Démonstration :

L'existence de λ résulte de 3.5, du corollaire 3.6 de [12] et du théorème 1 de [6]. Pour un tel λ, on a $gr^{-1}(\hat{\varphi}\circ\lambda\circ j) = gr^{-1}h$; l'existence et unicité de μ résulte alors de 1.4 et du théorème 1 de [6] .

3.8. Définition.

Une algèbre projetable de $D(V_1)$ sur $D(V_2)$ est une sous-algèbre de Lie transitive L_1 de $D(V_1)$ pour laquelle il existe un homomorphisme d'algèbres de Lie filtrées h de L_1 sur une sous-algèbre transitive de $D(V_2)$. Un tel homomorphisme sera appelé une projection de L_1 dans $D(V_2)$

On notera Π l'ensemble des algèbres projetables de $D(V_1)$ sur $D(V_2)$, ordonné par inclusion. Il est clair que pour tout sous-espace K de V_1 de dimension m , $\hat{G}(K)$ est un élément de Π et que pour tout homomorphisme surjectif $\varphi : V_1 \to V_2$ de noyau K , $\hat{\varphi}$ est une projection de $\hat{G}(K)$ dans (et même sur) $D(V_2)$.

3.9. Lemme.

Si K et K' sont des sous-espaces de dimension m de V_1 , il existe $\sigma \in \mathrm{Aut}\, DV_1$ tel que $gr^{-1}\sigma(K) = K'$ et $\sigma(\hat{G}(K)) = \hat{G}(K')$.

Démonstration :

Soit σ^{-1} un automorphisme de V_1 tel que $\sigma^{-1}(K) = K'$. On note σ l'extension de σ^{-1} à $D(V_1)$ et l'on montre aisément que σ répond à la question.

3.10. Corollaire.

Pour tout sous-espace K de dimension m de V_1 , $\hat{G}(K)$ est un élément maximal de Π .

3.11. Théorème.

Soient P et P' des éléments maximaux de Π et $h : P \to D(V_2)$, $h' : P' \to D(V_2)$ des projections. Posons $K = \ker gr^{-1}h$ et $K' = \ker gr^{-1}h'$. Il existe alors $\lambda \in \mathrm{Aut}\, D(V_1)$ tel que $gr^{-1}\lambda(K) = K'$ et que $\lambda(P) = P'$. Pour chaque tel λ il existe $\mu \in \mathrm{Aut}\, D(V_2)$ et un seul, tel que $h' \circ \lambda = \mu \circ h$. En particulier, pour tout élément maximal P de Π, toute projection $h : P \to D(V_2)$ est surjective.

Démonstration :

Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}\, D(V_1)$ satisfaisant aux conditions de 3.9. D'après 3.7 il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{Aut}\, D(V_1)$ tels que $gr\,\lambda_1 = gr\,\lambda_2 = id$ et que $\lambda_1(P) \subset \hat{G}(K)$ et $\lambda_2(P') \subset \hat{G}(K')$. Comme P et P' sont des éléments maximaux de π, on a, en fait, $\lambda_1(P) = \hat{G}(K)$ et $\lambda_2(P) = \hat{G}(K')$. Il suffit donc de prendre $\lambda = \lambda_2^{-1} \circ \sigma \circ \lambda_1$.

Pour chaque tel λ, on a $\ker gr^{-1}(h' \circ \lambda) = \ker gr^{-1}h$. L'existence et unicité de μ résulte alors de 1.4.

Le théorème 3.11 entraîne que si P est un élément maximal de Π tout autre est de la forme $\lambda(P)$ où $\lambda \in \mathrm{Aut}\, D(V_1)$. Un élément maximal de Π s'appelle une algèbre projetable maximale de $D(V_1)$ sur $D(V_2)$. Il résulte de 3.7 que tout élément de Π est contenu dans un élément maximal.

Soient maintenant L une algèbre projetable de $D(V_1)$ dans $D(V_2)$ et $h : L \to D(V_2)$ une projection. Soit P une algèbre projetable maximale de $D(V_1)$ sur $D(V_2)$ contenant L. Posons $K = \ker gr^{-1}h$. On a, nécessairement, $gr\,P = G(K)$, donc il existe $\lambda \in \mathrm{Aut}\, D(V_1)$ tel que $gr\,\lambda = id$ et $\lambda(P) = \hat{G}(K)$. Pour chaque tel λ il existe $\mu \in \mathrm{Aut}\, D(V_2)$ et un seul, tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{\lambda} & \hat{G}(K) \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \hat{\varphi}} \\ D(V_2) & & \xrightarrow{\mu} & & D(V_2) \end{array}$$

où $i : L \to P$ est l'inclusion et $\varphi = gr^{-1}h$, soit commutatif . Posons $\tilde{h} = \mu^{-1} \circ \hat{\varphi} \circ \lambda : P \to D(V_2)$. Alors $\tilde{h}$ est un prolongement de h à P .

Soit P' une autre algèbre projetable maximale de $D(V_1)$ sur $D(V_2)$ contenant L et soit $\tilde{h}'$ un prolongement de h à P' . Comme $gr\ P = gr\ P'$, il existe $\nu \in Aut\ D(V_1)$ tel que $gr\ \nu = id$ et $\nu(P) = P'$. Pour un tel ν il existe $\xi \in Aut\ D(V_2)$ et un seul tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\nu} & P' \\ {\scriptstyle \tilde{h}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{h}'} \\ D(V_2) & \xrightarrow{\xi} & D(V_2) \end{array}$$

soit commutatif.

Si l'on suppose $P' = P$, choisissons $\nu = id$. La restriction de ξ à $h(L)$ est nécessairement l'inclusion de $h(L)$ dans $D(V_2)$ donc, d'après le théorème 1 de [6] , $\xi = id$. Par conséquent, $\tilde{h}' = \tilde{h}$.

On peut résumer ce qui précède dans

3.12. Théorème

Soient L une algèbre projetable de $D(V_1)$ dans $D(V_2)$ et $h : L \to D(V_2)$ une projection. Pour toute algèbre projetable maximale P de $D(V_1)$ dans $D(V_2)$ contenant L , il existe une projection $\tilde{h} : P \to D(V_2)$ et une seule, qui prolonge h . Soit P' une autre algèbre projetable maximale de $D(V_1)$ dans $D(V_2)$ qui contient L et soit $\tilde{h}' : P' \to D(V_2)$ le prolongement de h à P' . Il existe alors $\nu \in Aut\ D(V_1)$ tel que $gr\ \nu = id$ et que $\nu(P) = P'$. Pour chaque tel ν , il existe $\xi \in Aut\ D(V_2)$ et un seul, tel que $\tilde{h}' \circ \nu = \xi \circ \tilde{h}$.

CHAPITRE II

CORRESPONDANCE ENTRE ALGEBRES DE LIE ABSTRAITES ET PSEUDO-GROUPES DE LIE TRANSITIFS

Dans tout ce chapitre le mot différentiable voudra dire différentiable de classe C^∞ . Nous nous placerons dans la catégorie des variétés paracompactes, différentiables ou analytiques réelles, sauf mention explicite du contraire. Les abréviations pg , pgi et sedp signifient, pseudo-groupe de Lie transitif, pseudo-groupe de Lie infinitésimal transitif et système d'équations aux dérivées partielles, respectivement.

1. REPRESENTATION D'HOMOMORPHISMES PAR DES JETS.

Soit M une variété et soit $a \in M$. On note $\mathcal{F}_a$ l'algèbre filtrée des jets d'ordre infini de source a des fonctions numériques sur M . La filtration de $\mathcal{F}_a$ sera notée $\{\mathcal{F}_a^k\}_{k\geq 0}$. Soit $\mathrm{Der}\,\mathcal{F}_a$ l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathcal{F}_a$. Pour $k \geq -1$, soit $\mathrm{Der}^k\mathcal{F}_a$ l'ensemble des $X \in \mathrm{Der}\,\mathcal{F}_a$ tels que $X\mathcal{F}_a \subset \mathcal{F}_a^{k+1}$. Alors $\{\mathrm{Der}^k\mathcal{F}_a\}_k$ est une filtration décroissante sur $\mathrm{Der}\,\mathcal{F}_a$ et $\mathrm{Der}\,\mathcal{F}_a$ muni de cette filtration est une algèbre de Lie filtrée, transitive et complète.

Soit $\mathcal{B}_a$ l'algèbre de Lie filtrée des jets d'ordre infini de source a des champs de vecteurs sur M . Il est bien connu que $\mathcal{B}_a$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Der}\,\mathcal{F}_a$, l'isomorphisme canonique étant défini de la manière suivante : à $j_a^\infty\vartheta \in \mathcal{B}_a$ on associe la dérivation :

$$j_a^\infty f \quad \mapsto \quad j_a^\infty(\vartheta.f)$$

de $\mathcal{F}_a$. On identifiera désormais les algèbres de Lie filtrées $\mathcal{D}_a$ et $\mathrm{Der}\,\mathcal{F}_a$ au moyen de cet isomorphisme.

Soit $x^1,\dots,x^n$ un système de coordonnées locales de M au voisinage de a , tel que $x^1(a) = \dots = x^n(a) = 0$. Il existe alors un isomorphisme d'algèbres filtrées F de $\mathcal{F}_a$ sur $\hat{S}(V^*)$, où $V = T_aM$, et un seul vérifiant :

$$F(j_a^\infty x^i) = (dx^i)_a \quad i = 1,\dots,n \quad .$$

Celui-ci induit un isomorphisme d'algèbres de Lie filtrées

$$\tilde{F} : X \in \mathcal{D}_a \mapsto F\circ X\circ F^{-1} \in D(V) \ .$$

Il en résulte qu'on peut appliquer à $\mathcal{F}_a$ et $\mathcal{D}_a$ les résultats démontrés pour $\hat{S}(V^*)$ et $D(V)$.

Pour le reste des notations utilisées dans ce chapitre, on peut se reporter à la liste des notations à la fin du chapitre.

Si $X \in J^{k+1}M$ (resp $X \in J^\infty M$) , on note X_* l'isomorphisme tronqué de $J^k_{\alpha(X)}TM$ sur $J^k_{\beta(X)}TM$ (resp l'isomorphisme d'algèbres de Lie filtrées de $\mathcal{D}_{\alpha(X)}$ sur $\mathcal{D}_{\beta(X)}$) induit par X (cf [5] page 7).

Soient $a,b \in M$ et soit $h : \mathcal{D}_a \to \mathcal{D}_b$ un isomorphisme d'algèbres de Lie filtrées. D'après I,2.3, il existe un isomorphisme d'algèbres filtrées $H : \mathcal{F}_a \to \mathcal{F}_b$, tel que $h(X) = H\circ X\circ H^{-1}$ pour tout $X \in \mathcal{D}_a$. Soient $x^1,\dots,x^n$ et $y^1,\dots,y^n$ des systèmes de coordonnées locales de M , au voisinage de a et b respectivement, tels que

$$x^1(a) = \dots = x^n(a) = y^1(b) = \dots = y^n(b) = 0 \ .$$

Posons $H(j_a^\infty x^i) = j_b^\infty g^i$. Soit g l'application définie au voisinage de b , à valeurs dans M , ayant $g^1,\dots,g^n$ pour composantes par rapport à $x^1,\dots,x^n$. Il est immédiat que g est un difféomorphisme local (de classe C^∞) de M et que pour tout $j_a^\infty f \in \mathcal{F}_a$ on a $H(j_a^\infty f) = j_b^\infty(f\circ g)$. On en déduit aisément que si $X = j_a^\infty g^{-1}$, on a $h = X_*$. On montre facilement, en utilisant des coordonnées locales, que si $Y \in J^\infty M$ est tel que $h = Y_*$, on a $Y = X$. On dit alors que h <u>est représenté par le jet</u> X .

Soient L et N deux sous-algèbres de Lie transitives et complètes de $\mathfrak{g}_a$ et $\mathfrak{g}_b$ respectivement et soit k un entier tel que $H^{i,1}(N) = H^{i,2}(N) = 0$ pour tout $i \geq k$. On considère un homomorphisme tronqué injectif $h^k : L/L^k \to N/N^k$. D'après les théorèmes 1 et 2 de [6], il existe un isomorphisme $h : \mathfrak{g}_a \to \mathfrak{g}_b$ tel que $h(L) \subset N$ et que h induise h^k. Soit X le jet qui représente h. Posons $X^{k+1} = \pi^{k+1}(X)$. Il est clair que $X_*^{k+1} = h^k$. En plus si $Y \in J^{k+1}M$ est tel que $h^k = Y_*$, on a $Y = X^{k+1}$. On dit que h^k <u>est représenté par le jet</u> X^{k+1}. On a donc montré :

1.1. <u>Proposition</u>.

<u>Soient</u> L <u>et</u> N <u>des sous-algèbres de Lie transitives et complètes de</u> $\mathfrak{g}_a$ <u>et</u> $\mathfrak{g}_b$ <u>respectivement. Soit</u> k <u>un entier tel que</u> $H^{i,1}(N) = H^{i,2}(N) = 0$ <u>pour tout</u> $i \geq k$. <u>Alors pour tout homomorphisme tronqué injectif</u> $h^k : L/L^k \to N/N^k$, <u>il existe</u> $X \in J^\infty M$ <u>tel que</u> $X_*L \subset N$ <u>et que</u> $X_*^{k+1} = h^k$, <u>où</u> $X^{k+1} = \pi^{k+1}(X)$. <u>Si</u> $Y \in J^\infty M$ <u>satisfait aussi à ces conditions, on a</u> $X^{k+1} = Y^{k+1}$.

On se propose maintenant de généraliser ce résultat.

Soient M_1 et M_2 deux variétés et supposons que $\dim M_1 \geq \dim M_2$. On pose $\dim M_2 = n$ et $\dim M_1 = n+m$. Dans toute la suite de ce paragraphe, tous les jets de M_1 dans M_2 que nous allons considérer seront des jets de submersions. Si $X \in J^\infty(M_1, M_2)$, on notera X^k sa projection sur $J^k(M_1, M_2)$.

Soit $X \in J^{k+1}(M_1, M_2)$; on dira que $j^k_{\alpha(X)}\vartheta \in J^k_{\alpha(X)}TM_1$ est X-projetable s'il existe des représentants ρ et η de X et de $j^k_{\alpha(X)}\vartheta$ respectivement, tels que η soit ρ-projetable. Sous ces conditions, on remarque que, le jet $j^k_{\beta(X)}(\rho_*\eta)$ dépend seulement de X et de $j^k_{\alpha(X)}\vartheta = j^k_{\alpha(X)}\eta$. On pose $X_* j^k_{\alpha(X)}\vartheta = j^k_{\beta(X)}(\rho_*\eta)$. Si l'on note $P^k(X)$ le sous-espace de $J^k_{\alpha(X)}TM_1$ des $J^k_{\alpha(X)}\vartheta$, X-projetables, on a une application linéaire surjective X_* de $P^k(X)$ sur $J^k_{\beta(X)}TM_2$.

Si $X \in J^\infty(M_1, M_2)$, on dira que $j^\infty_{\alpha(X)}\vartheta$ est X-projetable, si,

pour tout $k \geq 1$, $j^k_{\alpha(X)} \vartheta \in P^k(X^{k+1})$. Il est clair que l'ensemble $P(X)$ des éléments X-projetables de $\mathcal{D}_{\alpha(X)}(M_1)$ est une sous-algèbre de Lie transitive et complète de $\mathcal{D}_{\alpha(X)}(M_1)$ et que X induit un homomorphisme surjectif d'algèbres de Lie filtrées de $P(X)$ sur $\mathcal{D}_{\beta(X)}(M_2)$.

Par suite $P(X)$ est une algèbre projetable de $\mathcal{D}_{\alpha(X)}(M_1)$ dans $\mathcal{D}_{\beta(X)}(M_2)$ et l'on montre sans peine qu'elle est maximale.

On se donne $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2$ et l'on pose $V_1 = T_{a_1}M_1$ et $V_2 = T_{a_2}M_2$. Soit K un sous-espace de dimension m de V_1 , et $\varphi : V_1 \to V_2$ une application linéaire surjective.

1.2. Lemme.

Il existe $X \in J^\infty(M_1, M_2)$ et un seul tel que $\alpha(X) = a_1$, $\beta(X) = a_2$, $\hat{G}(K) = P(K)$ et que $X_* = \hat{\varphi}$. Si nos données sont analytiques, il existe une submersion f définie sur un voisinage U_1 de a_1 à valeurs dans M_2 telle que $\hat{G}(K)$ soit l'algèbre de Lie au point a_1 du pgi $\wp$ sur U_1 des germes des champs de vecteurs f-projetables.

Démonstration :

Soit $e_1, \ldots, e_{n+m}$ une base de V_1 telle que $\epsilon_i = \varphi(e_i)$, $i = 1, \ldots, n$, soit une base de V_2 et que $\varphi(e_{n+1}) = \ldots = \varphi(e_{n+m}) = 0$. On considère un système de coordonnées locales $x^1, \ldots, x^{n+m}$ de M_1 au voisinage de a_1 et un autre $y^1, \ldots, y^n$ de M_2 au voisinage de a_2 , tels que $x^1(a_1) = \ldots = x^{n+m}(a_1) = y^1(a_2) = \ldots = y^n(a_2) = 0$ et que $e_i = (\frac{\partial}{\partial x^i})_{a_1}$ et $\epsilon_j = (\frac{\partial}{\partial y^j})_{a_2}$. Soit f la submersion définie sur un voisinage convenable U_1 de a_1 , à valeurs dans M_2 par :

$$f(x^1, \ldots, x^{n+m}) = (x^1, \ldots, x^n) .$$

Posons $X = j^\infty_{a_1} f$.

Soit $\vartheta = \sum \vartheta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ un champ de vecteurs sur M_1 défini au voisinage de a_1 . Il est facile de voir que $j^\infty_{a_1} \vartheta \in \hat{G}(K)$ si et seulement si

$$\frac{\partial^s \vartheta^i}{\partial x^{j_1} \ldots \partial x^{j_s}}(a_1) = 0$$

pour tout $s \geq 1$ et tout $(i,j_1,\ldots,j_s)$ avec $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_s \leq n+m$ et $n < j_s \leq n+m$; en d'autres termes $j^\infty_{a_1}\vartheta \in \hat{G}(K)$ si et seulement si $j^\infty_{a_1}\vartheta$ est X-projetable. Remarquons alors que

$$X_* j^\infty_{a_1}\vartheta = \hat{\varphi}(j^\infty_{a_1}\vartheta) .$$

L'unicité de X résulte d'un calcul en coordonnées locales.

Si nos données sont analytiques, alors f est analytique. Soit $\wp$ le pgi sur U_1 des germes des champs de vecteurs f-projetables. Il est immédiat que $J^\infty_{a_1}\wp$ est contenu et dense dans $\hat{G}(K)$ donc $\hat{G}(K) = L(\wp,a_1)$.

De I, 3.7 de 1.1 et 1.2 on déduit :

1.3. Corollaire.

Soit L une algèbre projetable de $\mathfrak{d}_{a_1}(M_1)$ dans $\mathfrak{d}_{a_2}(M_2)$ et soit $h : L \to \mathfrak{d}_{a_2}(M_2)$ une projection. Il existe $Y \in J^\infty(M_1,M_2)$, et un seul, tel que $\alpha(Y) = a_1$, $\beta(Y) = a_2$, $L \subset P(Y)$ et que h soit la restriction de Y_* à L . Si L est maximale, on a $L = P(Y)$.

2. PREMIER PROBLEME D'EQUIVALENCE LOCALE.

Soit Θ un pgi sur une variété M . Pour $k \geq 1$, on note $N^{k+1}(\Theta)$ le groupoïde des $X \in J^{k+1}M$, tels que $X_* J^k_{\alpha(X)}\Theta = J^k_{\beta(X)}\Theta$. Si Γ est le pg associé à Θ, on a évidemment $J^{k+1}\Gamma \subset N^{k+1}(\Theta)$. Pour $a \in M$, soit $G^{k+1}_a(\Theta)$ le groupe des $X \in N^{k+1}(\Theta)$ tels que $\alpha(X) = \beta(X) = a$ Il est clair que $G^{k+1}_a(\Theta)$ est un sous-groupe de Lie fermé de $G\ell^{k+1}_a(M)$ et, il résulte de 1.1, que, pour k assez grand l'application canonique $\pi^{k+2}_{k+1} : G^{k+2}_a(\Theta) \to G^{k+1}_a(\Theta)$ est surjective et, par suite, une fibration. En plus, pour tous X , $Y \in J^{k+1}\Gamma$, tels que $\alpha(X) = \beta(Y) = a$, $X \circ G^{k+1}_a(\Theta) \circ Y$ est l'ensemble des $Z \in N^{k+1}(\Theta)$ tels que $\alpha(Z) = \alpha(Y)$ et $\beta(Z) = \beta(X)$.

Par conséquent $N^{k+1}(\Theta)$ est un groupoïde de Lie, pour tout $k \geq 1$ et, pour k assez grand, l'application canonique $\pi^{k+2}_{k+1} : N^{k+2}(\Theta) \to N^{k+1}(\Theta)$ est une fibration.

Considérons maintenant deux pgi Θ_1 et Θ_2 sur M. On se donne $a_1, a_2 \in M$ et l'on pose $L_1 = L(\Theta_1, a_1)$ et $L_2 = L(\Theta_2, a_2)$. On suppose qu'il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie filtrées h de L_1 sur L_2 et l'on notera h^k l'isomorphisme tronqué de L_1/L_1^k sur L_2/L_2^k induit par h. Si Z est le jet qui représente h, on posera $Z^k = \pi^k(Z)$.

On note S^{k+1}, pour $k \geq 1$, l'ensemble des $X \in J^{k+1}M$ tels que $X_* J^k_{\alpha(X)}\Theta_1 = J^k_{\beta(X)}\Theta_2$. Si R_1^{k+1} (resp L_2^{k+1}) est l'ensemble des $X \in N^{k+1}(\Theta_1)$ (resp des $X \in N^{k+1}(\Theta_2)$) tels que $\beta(X) = a_1$ (resp $\alpha(X) = a_2$), on a $S^{k+1} = L_2^{k+1} \circ Z^{k+1} \circ R_1^{k+1}$. Il en résulte que S^{k+1} est une sous-variété régulière de $J^{k+1}M$ et que, pour k assez grand, les applications canoniques

$$\alpha : S^{k+1} \to M \quad \text{et} \quad \pi^{k+2}_{k+1} : S^{k+2} \to S^{k+1}$$

sont des fibrations. On peut donc considérer S^{k+1} comme un sedp d'ordre $k+1$.

2.1. Lemme.

Pour tout $k \geq 1$, on a $pS^{k+1} \supset S^{k+2}$, où $pS^{k+1} = J^1(S^{k+1}) \cap J^{k+2}M$, est le prolongement de S^{k+1}.

Démonstration :

Il suffit de construire un système de générateurs de pS^{k+1} et de montrer qu'ils s'annulent sur S^{k+2}. Pour cela, considérons une section ϑ de Θ_1, définie sur un ouvert U de M et soit $\mathcal{U}$ l'ouvert de $J^{k+1}M$ des jets X tels que $\alpha(X) \in U$. On se donne $X_o \in \mathcal{U}$ et une forme linéaire A, définie sur un ouvert $\mathcal{U}'$ de $J^k TM$, contenant $X_{o*} j^k_{\alpha(X_o)}\vartheta$, et s'annulant sur $\mathcal{U}' \cap J^k\Theta_2$. Soit $\mathcal{V}$ l'ouvert de $J^{k+1}M$, constitué des éléments $X \in \mathcal{U}$, tels que $X_* j^k_{\alpha(X)}\vartheta \in \mathcal{U}'$. On définit :

$$F_{A,\vartheta} : X \in \mathcal{V} \longmapsto A(X_* j^k_{\alpha(X)}\vartheta) \in \mathbb{R} .$$

Soit $\sum^{k+1}$ l'ensemble de toutes les fonctions $F_{A,\vartheta}$, ainsi obtenues. Il est immédiat que S^{k+1} est égal à l'ensemble des $X \in J^{k+1}M$, tels que $F(X) = 0$, pour tout $F \in \sum^{k+1}$ définie au voisinage de X, i.e. $\sum^{k+1}$ est un système de générateurs de S^{k+1}. On sait alors (cf [7] § 4) que les fonctions $F \circ \pi_{k+1}^{k+2}$, $F \in \sum^{k+1}$ et les dérivées formelles des éléments de $\sum^{k+1}$, constituent un système de générateurs pour pS^{k+1}.

Il est immédiat que, si $F \in \sum^{k+1}$, la fonction $F \circ \pi_{k+1}^{k+2}$ s'annule sur l'intersection de son ensemble de définition avec S^{k+2}. Soit maintenant $X = j_x^{k+2} f \in S^{k+2}$. On considère un système de coordonnées locales $x^1, \ldots, x^n$ (resp $y^1, \ldots, y^n$) de M au voisinage de x (resp de $f(x)$). Soit $F_{A,\vartheta} \in \sum^{k+1}$ définie sur un voisinage de $\pi_{k+1}^{k+2}(X)$. La dérivée formelle de $F_{A,\vartheta}$ par rapport à x^i, au point X, est par définition :

$$\partial_{\#}^{x^i} F_{A,\vartheta}(X) = \frac{\partial}{\partial x^i} (F_{A,\vartheta} \circ j^{k+1} f)(x) \quad .$$

Considérons la fonction G définie au voisinage de $f(x)$ par

$$G(y) = A(j_y^k(f_* \vartheta)) \quad .$$

On a alors $F_{A,\vartheta} \circ j^{k+1} f = G \circ f$, donc

$$\partial_{\#}^{x^i} F_{A,\vartheta}(X) = \sum_j \frac{\partial G}{\partial y^j} (f(x)) . \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(x) \quad .$$

Or $\frac{\partial G}{\partial y^j}(f(x))$ est, par définition, la dérivée formelle de A, par rapport à y^j, au point $X_* j_x^{k+1} \vartheta \in J^{k+1}\Theta_2$, et par suite, comme $J^{k+1}\Theta_2 \subset pJ^{k+1}\Theta_1$, on a $\frac{\partial G}{\partial y^j}(f(x)) = 0$ pour tout j. Il s'ensuit que $\partial_{\#}^{x^i} F_{A,\vartheta}(X) = 0$, ce qui termine la démonstration.

Ce qui précède, et le théorème de prolongement de Cartan-Kuranishi (cf [7] § 10), nous permettent d'énoncer :

2.2. Théorème.

Si nos données sont analytiques, il existe k_o tel que, pour tout $k \geq k_o$, $pS^{k+1} = S^{k+2}$ au voisinage de Z^{k+2} et que S^{k+1} soit involutif en Z^{k+1}. En particulier, pour tout $k \geq 1$, il existe un difféomorphisme

local f de M défini sur un voisinage W de a_1 tel que :

1) $j^{k+1}_{a_1} f = Z^{k+1}$

2) $f_* \Theta_1 |_W = \Theta_2 |_{f(W)}$.

On en déduit le corollaire suivant ([3],[5]) :

2.3. Corollaire.

Les pgi Θ_1 et Θ_2 sont localement équivalents si et seulement si L_1 et L_2 sont des algèbres de Lie filtrées isomorphes.

3. HOMOMORPHISMES DE PSEUDO-GROUPES.

On se donne deux variétés M_1 et M_2 et l'on suppose que dim $M_1 \geq$ dim M_2 . On pose dim $M_2 = n$ et dim $M_1 = n+m$. Soient Θ_1 et Θ_2 deux pgi sur M_1 et M_2 respectivement.

3.1. Définition.

Un homomorphisme de Θ_1 sur Θ_2 est une fibration $\rho : M_1 \to M_2$ invariante par Θ_1 (cf [13] (1)) , telle que $\rho_* \Theta_1 = \Theta_2$.

Si ρ est un homomorphisme de Θ_1 sur Θ_2 , alors pour tout $x \in M_1$, ρ induit un homomorphisme d'algèbres de Lie filtrées $\rho_* = (j^\infty_x \rho)_*$ de $L(\Theta_1, x)$ dans $L(\Theta_2, \rho(x))$ tel que $\rho_* J^\infty_x \Theta_1 = J^\infty_{\rho(x)} \Theta_2$; en particulier $\rho_* L(\Theta_1, x)$ est dense dans $L(\Theta_2, \rho(x))$.

Réciproquement, supposons qu'il existe un homomorphisme d'algèbres de Lie filtrées $h : L_1 \to L_2$, où L_1 est l'algèbre de Lie de Θ_1 en un point a_1 de M_1 et L_2 celle de Θ_2 en un point a_2 de M_2 , tel que $h(L_1)$ soit dense dans L_2 . On pose $\varphi = gr^{-1} h$ et $K = \ker \varphi$.

D'après I, 3.7 , il existe $\lambda \in$ Aut $\mathcal{B}_{a_1}(M_1)$ et $\mu \in$ Aut $\mathcal{B}_{a_2}(M_2)$,

tels que $\hat{\varphi}\circ\lambda\circ j = \mu\circ h$, où $j : L_1 \to \mathcal{J}_{a_1}(M_1)$ est l'inclusion. Posons $\hat{L}_1 = \lambda(L_1) \subset \hat{G}(K)$.

Supposons maintenant que nos données sont analytiques. D'après 1.2, il existe une submersion f définie sur un voisinage U_1 de a_1 , à valeurs dans M_2 , telle que $f(a_1) = a$, $(j^\infty_{a_1} f)_* = \hat{\varphi}$ et que $\hat{G}(K)$ soit l'algèbre de Lie au point a_1 du pgi $\mathcal{P}$ sur U_1 des germes des champs de vecteurs f-projetables. Le corollaire 6.1 de [3] , implique que, pour tout $k \geq 0$, l'existence d'un pgi Θ'_1 , au voisinage de a_1 , contenu dans $\mathcal{P}$, tel que, si $L'_1 = L(\Theta'_1, a_1)$, il existe un automorphisme δ de $\mathcal{J}_{a_1}(M_1)$, égal à l'identité à l'ordre k et vérifiant $\delta(\hat{L}_1) = L'_1$. D'après 2.2 il existe des voisinages V_1 et W_1 de a_1 et un difféomorphisme $f_1 : V_1 \to W_1$ tel que $(j^{k+1}_a f_1)_* = (\delta\circ\lambda)^k = \lambda^k$ et que $f_{1*}\Theta_1|V_1 = \Theta'_1|W_1$. La fibration $\tau = f\circ f_1 : V_1 \to f(W_1)$ est alors invariante par $\Theta_1|V_1$. Posons $\Theta'_2 = \tau_*\Theta_1|V_1$ D'après le théorème 1 de [13] (2) , Θ'_2 est un pgi sur $W_2 = f(W_1)$.

On note τ_* l'homomorphisme de L_1 dans $L'_2 = L(\Theta'_2, a_2)$ induit par τ . On remarque que $gr^{-1}\tau_* = gr^{-1}h$ donc, d'après I, 1.4, il existe un homomorphisme surjectif d'algèbres de Lie filtrées $\gamma : h(L_1) \to \tau_*(L_1)$, et un seul, tel que $\gamma\circ h = \tau_*$. De 1.2, 3) résulte que γ est un isomorphisme d'algèbres de Lie filtrées, donc (cf [6] , théorème 1) c'est la restriction à $h(L_1)$ d'un automorphisme de $\mathcal{J}_{a_2}(M_2)$, automorphisme que l'on notera encore γ . Comme $h(L_1)$ est dense dans L_2 et que $\tau_*(L_1)$ est dense dans L'_2 , on a $\gamma(L_2) = L'_2$.

D'après 2.2, il existe un difféomorphisme local f_2 de M_2 , défini sur un voisinage W'_2 de a_2 , tel que $(j^{k+1}_{a_2} f_2)_* = \gamma^k$ et que $f_{2*}\Theta_2|W'_2 = \Theta'_2|f(W'_2)$. Il est alors immédiat que la fibration $\rho = f_2^{-1}\circ\tau$ est invariante par la restriction de Θ_1 sur un voisinage convenable W'_1 de a_1 , que $(j^{k+1}_{a_1}\rho)_* = h^k$ et que $\rho_*\Theta_1|W'_1 = \Theta_2|\rho(W'_1)$.

On résume ce qui précède dans :

3.2. Théorème.

Soient Θ_1 et Θ_2 deux pgi sur M_1 et M_2 respectivement. Soient $a_1 \in M_1$ et $a_2 \in M_2$ et posons $L_1 = L(\Theta_1, a_1)$ et $L_2 = L(\Theta_2, a_2)$. On suppose qu'il existe un homomorphisme d'algèbres de Lie filtrées $h : L_1 \to L_2$ tel que $h(L_1)$ soit dense dans L_2. Alors pour tout $k \geq 1$, il existe des voisinages W_1' et W_2' de a_1 et a_2, respectivement, et un homomorphisme ρ de $\Theta_1|W_1'$ sur $\Theta_2|W_2'$ tel que $(j^{k+1}_{a_1}\rho)_* = h^k$.

3.3. Corollaire.

Avec les notations précédentes, pour qu'il existe, localement, un homomorphisme de Θ_1 sur Θ_2, il faut et il suffit qu'il existe un homomorphisme $h : L_1 \to L_2$ tel que $h(L_1)$ soit dense dans L_2.

Supposons, maintenant, que h est injectif. Alors $h(L_1)$ est une sous-algèbre complète de $\mathfrak{d}_{a_2}(M_2)$ et par suit $h(L_1) = L_2$. De I, 1.2, 4) résulte alors que $\rho_* : L_1 \to L_2$ est bijectif, donc, pour tout $x \in W_1'$, $\rho_* : L(\Theta_1, x) \to L(\Theta_2, \rho(x))$ est bijective. Par conséquent, nos données étant analytiques, $\Theta_1|W_1'$ est un ρ-prolongement isomorphe de $\Theta_2|W_2'$.

4. LA RELATION D'EQUIVALENCE DE E. CARTAN.

Soient M_1 et M_2 deux variétés analytiques et soient $a_1 \in M_1$ et $a_2 \in M_2$. On considère deux pgi Θ_1 et Θ_2 sur M_1 et M_2 respectivement et l'on pose $L_1 = L(\Theta_1, a_1)$ et $L_2 = L(\Theta_2, a_2)$.

4.1. Théorème (cf Kuranishi [8]).

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) il existe un isomorphisme d'algèbre de Lie topologique h de L_1 sur L_2 ;

2) il existe un pgi Θ_3 sur une variété analytique M_3 qui soit localement un prolongement isomorphe de Θ_1 et de Θ_2.

Si l'une des conditions de ce théorème est vérifiée, on dit que Θ_1 et Θ_2 sont localement équivalents au sens de E. Cartan.

Démonstration :

Le fait que 2) implique 1) est immédiat. Inversement admettons 1). D'après I, 1.3, il existe un entier $d \geq 0$, tel que $h(L_1^{k+d}) \subset L_2^k$ pour tout $k \geq 0$. Soit $p^d\Theta_1$ le d^e prolongement normal de Θ_1 sur la variété $M_3 = J^d_{a_1}\Gamma_1$, où Γ_1 est le pg associé à Θ_1. Il est bien connu que Θ_3 est un prolongement isomorphe de Θ_1. D'autre part l'algèbre de Lie L_3 de Θ_3 au point $j^d_{a_1} id_{M_1}$ est l'isomorphe à $L_{1[d]}$, donc h induit un homomorphisme bijectif de L_3 sur L_2. Il suffit donc d'appliquer 3.3 pour obtenir le résultat.

Le théorème précédent justifie la terminologie suivante :

4.2. Définition.

Un pseudo-groupe de Lie infinitésimal localisé (en abrégé pgil) sur une variété M est un germe de pgi en un point $a \in M$. Si Θ est un pgi sur M et $a \in M$, on note (Θ,a) le germe de Θ au point a.

Les notions que l'on a définies pour les pgi s'étendent, de manière naturelle aux pgil. On peut, en particulier, parler de l'algèbre de Lie d'un pgil (Θ,a) ; celle-ci sera notée $L(\Theta,a)$.

Du théorème 4.2 on déduit alors :

4.3. Corollaire.

Dans la catégorie des pgil, l'équivalence des pgil au sens de E. Cartan est une relation d'équivalence. Un groupe de Lie infini transitif est une classe d'équivalence de pgil.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - BOURBAKI N. - "Algèbre commutative" Chap.3.

[2] - BOURBAKI N. - "Algèbre" Chap.4.

[3] - GOLDSCHMIDT H. - "Sur la structure des équations de Lie : I - Le troisième théorème fondamental ; II - Equations formellement transitives".
J. Differential Geometry (à paraître).

[4] - GUILLEMIN V. et STERNBERG S. - "An algebraic model of transitive differential geometry".
(Bul.Am. Math.Soc. 70 (1964)).

[5] - GUILLEMIN V. et STERNBERG S. - "Deformation theory of pseudo-group structures".
(Mem. of the Am.Math.Soc. n°64 (1966)).

[6] - HAYASHI I. - "Embedding and existence theorems of infinite Lie algebras".
(J. Math. Soc. of Japan Vol.22, n°1,1970).

[7] - KURANISHI M. - "Lectures on involutive systems of partial differential equations"
(Publicações da Sociedade Matemàtica de São Paulo, São Paulo 1967).

[8] - KURANISHI M. - "On the local theory of continuous infinite pseudo-groups II".
(Nagoya Math. J. 19 (1961) pp. 55-91).

[9] - KURANISHI M. et RODRIGUES A.M. - "On the quotient of a continuous pseudo-group by an invariant fibering".
(Nagoya J. Math. 24, 1964, pp. 109-128).

[10] - MATSUSHIMA Y. - "Pseudo-groupes de Lie transitifs".
(Séminaire Bourbaki n° 118).

[11] - ORELLANA M. - thèse de 3e cycle (Grenoble 1970).

.../...

[12] - RIM D.S. - "Deformations of transitive Lie algebras". (Ann. of Math. vol. 83, 1966).

[13] - RODRIGUES A.M. - C.R.Acad. Sci. de Paris, série A .
(1) pp. 1154-1155 (15.12.69)
(2) pp. 1211-1213 (22.12.69).

[14] - RODRIGUES A.M. - "G-structures et pseudo-groupes de Lie". (Notes d'un cours donné en 1967-68 à l'Université de Grenoble).

[15] - RODRIGUES A.M. - "The first and second fundamental theorems of Lie for Lie pseudogroups". (Ann. J. of Math., 84, 1962).

[16] - SINGER I.S. et STERNBERG S. - "The infinite groups of Lie and Cartan". Part.I (J. Anal. Math. Vol.15, 1965).

NOTATIONS

$\mathrm{gr}\ L = \oplus\ \mathrm{gr}^k L$	algèbre de Lie graduée associée à une algèbre de Lie filtrée L
$\omega(L)$	tenseur de structure de L
$\rho^{-1}: L \to L/L^0$ $\rho^k : L \to L^k/L^{k+1}$	projections
$\mathrm{Tr}\ L$	algèbre de Lie tronquée associée à L
$h^k : L_1/L_1^k \to L_2/L_2^k$	homomorphisme tronqué d'ordre k induit par un homomorphisme $h : L_1 \to L_2$ d'algèbres de Lie filtrées
$L_{[p]}$	prolongement normal d'ordre p d'une algèbre de Lie filtrée L (page 3)
$\hat{S}(V^*)$	algèbre des séries formelles à coefficients dans V (page 4)
$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^1$	idéal maximal de $\hat{S}(V^*)$ (page 4)
$\mathfrak{m}^k$	k^e puissance de $\mathfrak{m}$ (page 4)
$D(V)$	algèbre de Lie filtrée des dérivations de $\hat{S}(V^*)$ (page 4)
$G^k(K)$	cf page 8
$G(K), \hat{G}(K)$	cf pages 8 et 10
$H^{i,j}(L)$	groupe de cohomologie de Spencer de bi-degré (i,j) de L
Π	ensemble des algèbres projetables de $D(V_1)$ sur $D(V_2)$ (page 11)
$\hat{\varphi} : \hat{G} \to D(V_2)$	cf page 10
$\mathcal{F}_a(M)$ ou $\mathcal{F}_a$	jets d'ordre infini de source a des fonctions réelles (de classe C^∞) définies sur une variété M
$\{\mathcal{F}_a^k(M)\}$ ou $\{\mathcal{F}_a^k\}$	filtration de $\mathcal{F}_a$
$\mathrm{Der}\ \mathcal{F}_a$	algèbre de Lie des dérivations de $\mathcal{F}_a$ (page 15)

.../...

$\mathfrak{g}_a(M)$ ou $\mathfrak{g}_a$	algèbre de Lie filtrée des jets d'ordre infini de source a des champs de vecteurs sur M
$J^k(M_1,M_2)$	variété des jets d'ordre k de M_1 dans M_2
$J^\infty(M_1,M_2)$	jets d'ordre infini de M_1 dans M_2
J^kM	jets d'ordre k inversibles de M dans M
$J^\infty M$	jets d'ordre infini inversibles de M dans M
X_*	cf page 16
π_k^{k+1}	projection d'un ensemble de jets d'ordre k+1 dans un ensemble de jets d'ordre k
$X^k, X \in J^\infty(M_1,M_2)$	projection de X sur $J^k(M_1,M_2)$
$P^k(X)$, $X \in J^{k+1}(M_1,M_2) = \{j^k_{\alpha(X)}\vartheta \in J^k_{\alpha(X)}TM_1$, X-projetables$\}$	cf page 18)
$P(X)$	$\lim_{\leftarrow} P^k(X^{k+1})$ (page 18)
$L(\Theta,a)$	algèbre de Lie d'un pgi en un point a
$N^k(\Theta)$	cf page 19 .

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES.

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FEL'CI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
MM.	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Sémiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA J.C.	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique
	RADHAKRISHNA Pidatala	Thermodynamique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	AUBERT Guy	Physique
	BEAUDOING André	Pédiatrie
MM.	BERTRANDIAS Jean Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POUJOULADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
M.	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BLIMAN Samuel	Electronique (E.I.E.)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (C.U.S.)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques apoliquées
	BOUVARD Maurice	Mécanique des fluides
	BRIERE Georges	Physique expérimentale
	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (E.F.P.)
	CHIRON Pierre	Biologie animale

	COHEN-ADDAD J.P.	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (C.U.S.)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GENSAC Pierre	Botanique
	GERMAIN Jean Pierre	Mécanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean René	Mathématiques pures
	JOUBERT Jean Claude	Physique du solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean Marie	Physique nucléaire
	LONGEQUEUE Jean Pierre	Physique nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (C.U.S.)
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (I.N.P.)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean Claude	Physique du solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mle	PIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B)
	ROUGEMONT (DE) J.	Neuro-Chirurgie
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques appliquées (I.N.P.)
MM.	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

VU,

Grenoble, le

Le Président de la thèse,

C. CHABAUTY

VU, et permis d'imprimer

Grenoble, le

Le Président de l'Université scientifique
et médicale,

M. SOUTIF